Angaben zu Aufgabe 3:

Ein schwingfähiges mechanisches System ist mit einem geschwindigkeitsproportionalem Dämpfer ausgestattet.

Folgende in diesem Zusammenhang auftretende Fragen sind zu beantworten.

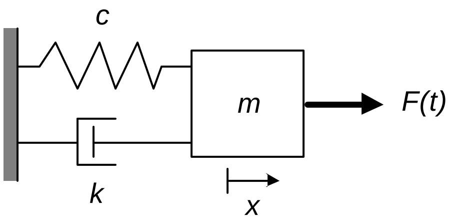
3.1 Stellen Sie die Differenzialgleichung dieses Schwingungsvorganges auf, wenn eine konstante äußere Kraft F_0 wirkt.
Wie sind die Abklingkonstante δ, die Eigenkreisfrequenz ω_0 definiert und was sagt der Dämpfungsgrad D aus?

3.2 Lösen Sie die Differenzialgleichung (entnehmen Sie die Daten aus der Tabelle) für die folgende Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $v(0) = v_0$, wobei k so bestimmt werden soll, dass sich der Kriechfall ergibt.

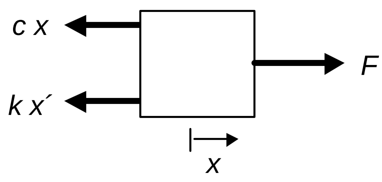
3.3 Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_{max}, an dem $y_h(t)$ den maximalen Wert erreicht.
Stellen Sie $x_p(t)$, $x_h(t)$ und $x(t)$ mit Hilfe von Mathcad in $[0|15t_{max}]$ graphisch dar.

c in N/m	m in kg	F_0 in N	D	v_0 in cm/s
20	0.5	1.50	0.3	30

Die beiden Skizzen stellen die Problemstellung inklusive Freischnitt dar. Die Kraft *F* kann von beliebiger Art sein. (In diesem Teil der Aufgabe ist *F* von der Form F_0 = konstant



kraftgesteuerte angefachte Schwingung



Freischnitt

1. Teil:
Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus dem Freischnitt zu (F(t) = F_0 (konstant)):

$$m_a \cdot x'' + k \cdot x' + c \cdot x = F_0$$

Mathcad kann leider die gängige Bezeichnung für die Ableitung nach der Zeit (mit Punkt) nicht darstellen; daher x´ und x´´ (erhält man schnell über STRG F7)

$$x'' + \frac{k}{m_a} \cdot x' + \frac{c}{m_a} \cdot x = \frac{F_0}{m_a}$$

erhält man durch Division mit m_a

mit $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m_a}}$ (Eigenkreisfrequenz)

und $\delta = \dfrac{k}{2 \cdot m_a}$ (Abklingkoeffizient)

$$x'' + 2 \cdot \delta \cdot x' + \omega_0^{\,2} \cdot x = \frac{F_0}{m_a}$$

Die DGL liegt nun in der Technik üblichen Schreibweise vor.

Der Dämpfungsgrad $D = \dfrac{\delta}{\omega_0}$ gibt Auskunft darüber, wie sich das schwingfähige System verhält

$\delta^2 - \omega_0^{\,2} > 0$ das heißt D > 1 starke Dämpfung (Kriechfall)

$\delta^2 - \omega_0^{\,2} = 0$ das heißt D = 1 aperiodischer Grenzfall

$\delta^2 - \omega_0^{\,2} < 0$ das heißt 0 < D < 1 schwache Dämpfung (Schwingfall)

Zuerst bestimmt man die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung mit Hilfe des Ansatzes $x(t) = e^{\lambda \cdot t}$

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda \cdot t}$

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda \cdot t} \rightarrow \lambda \cdot \exp(\lambda \cdot t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda \cdot t} \rightarrow \lambda^2 \cdot \exp(\lambda \cdot t)$$

In DGL eingesetzt liefert das folgende Gleichung:

$$\left(\lambda^2 + 2 \cdot \delta \cdot \lambda + \omega_0^{\,2}\right) \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0$$

daraus folgt, da $e^{\lambda \cdot t}$ für endliche λ und $t \ge 0$ ist.

$$\lambda^2 + 2 \cdot \delta \cdot \lambda + \omega_0^{\,2} = 0 \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \begin{bmatrix} -\delta + \left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ -\delta - \left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Eine etwas andere Schreibweise liefert: $\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^{\,2}}$ und $\lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^{\,2}}$

Die allgemeine Lösung $x_h(t)$ hat nun folgendes Aussehen, wobei der Ausdruck unter der Wurzel > 0 sein muss (Kriechfall); die beiden Konsatnte C_1 und C_2 sind noch unbestimmt

$$x_h(t) = C_1\cdot e^{\left[-\delta+\left(\delta^2-\omega_0{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot t} + C_2\cdot e^{\left[-\delta-\left(\delta^2-\omega_0{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot t}$$

Die partikuläre Lösung erhält man durch den Ansatz $x_p(t) = a$, der sich aus der Störfunktion F_0 ist konstant ergibt. Einsetzen in die DGL liefert:

$$\frac{d^2}{dt^2}a + 2\cdot\delta\cdot\frac{d}{dt}a + \omega_0{}^2\cdot a = \frac{F_0}{m_a} \text{ auflösen}, a \rightarrow \frac{F_0}{m_a\cdot\omega_0{}^2} \qquad x_p(t) = \frac{F_0}{m_a\cdot\omega_0{}^2}$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m_a\cdot\omega_0{}^2} + \left[C_1\cdot e^{\left[-\delta+\left(\delta^2-\omega_0{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot t} + C_2\cdot e^{\left[-\delta-\left(\delta^2-\omega_0{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot t}\right]$$

Lösung der DGL (ohne Anfangsbedingungen)

Durch die Anfagsbedingungen werden die Konstanten C_1 und C_2 berechnet; es gilt:

1. Anfangsbedingung: $x(0) = 0$
2. Anfangsbedingung: $v(0) = v_0$

1. Anfangsbedingung

$$0 = \frac{F_0}{m_a\cdot\omega_0{}^2} + \left[C_1\cdot e^{\left(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0{}^2}\right)\cdot t} + C_2\cdot e^{\left(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0{}^2}\right)\cdot t}\right] \left|\begin{array}{l}\text{ersetzen}, t = 0\\ \text{gleit}, 4\end{array}\right. \rightarrow 0 = \frac{F_0}{m_a\cdot\omega_0{}^2} + C_1$$

$$0 = \frac{F_0}{m_a\cdot\omega_0{}^2} + C_1 + C_2$$

2. Anfangsbedingung

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{F_0}{m_a\cdot\omega_0{}^2} + \left[C_1\cdot e^{\left(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0{}^2}\right)\cdot t} + C_2\cdot e^{\left(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0{}^2}\right)\cdot t}\right]\right] = v_0 \left|\begin{array}{l}\text{ersetzen}, t = 0\\ \text{gleit}, 3\end{array}\right. \rightarrow C_1\cdot\left[-1.\cdot\delta\cdot\right.$$

$$v_0 = C_1\cdot\left[-1.\cdot\delta + \left(\delta^2 - 1.\cdot\omega_0{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] + C_2\cdot\left[-1.\cdot\delta + \left(\delta^2 - 1.\cdot\omega_0{}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Das Gleichungssystem für C_1 und C_2 wird nun gelöst

Vorgabe

$$0 = \frac{F_0}{m_a \cdot \omega_0^{\,2}} + C_1 + C_2$$

$$C_1 \cdot \left[-\delta + \left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] + C_2 \cdot \left[-\delta - 1. \cdot \left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] = v_0$$

$$\text{Suchen}\left(C_1, C_2\right) \text{ gleit}, 3 \rightarrow \begin{bmatrix} .500 \cdot \dfrac{-1. \cdot \left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot F_0 - 1. \cdot \delta \cdot F_0 + v_0 \cdot m_a \cdot \omega_0^{\,2}}{\left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot m_a \cdot \omega_0^{\,2}} \\ -.500 \cdot \dfrac{-1. \cdot \delta \cdot F_0 + \left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot F_0 + v_0 \cdot m_a \cdot \omega_0^{\,2}}{\left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot m_a \cdot \omega_0^{\,2}} \end{bmatrix}$$

Ersetzen von C_1 und C_2 durch die gefundenen Werte liefert nun folgende Funktion:

$$x(t) = \frac{F_0}{m_a \cdot \omega_0^{\,2}} + \left[C_1 \cdot e^{\left[-\delta + \left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot t} + C_2 \cdot e^{\left[-\delta - \left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot t} \right] \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, C_1 = .500 \cdot \dfrac{-1. \cdot \left(\delta\right.}{} \\ \text{ersetzen}, C_2 = -.500 \cdot \dfrac{-1. \cdot \delta}{} \end{array} \right.$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m_a \cdot \omega_0^{\,2}} + .500 \cdot \frac{-1. \cdot \left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot F_0 - 1. \cdot \delta \cdot F_0 + v_0 \cdot m_a \cdot \omega_0^{\,2}}{\left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot m_a \cdot \omega_0^{\,2}} \cdot \exp\left[\left[-\delta + \left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot t \right] -$$

Die homogene Lösung soll nun graphisch dargestellt werden.

$c := 20 \cdot \frac{N}{m} \qquad m_a := 0.5 \cdot kg$ Daten von Feder und Masse

$v_0 := 0.3 \cdot \frac{m}{s}$ Anfangsgeschwindigkeit

$\omega_0 := \sqrt{\frac{c}{m_a}} \qquad \omega_0 = 6\,Hz$ Berechnung der Eigenkreisfrequenz

$D := 1.5$ Annahme, damit Kriechfall eintritt

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, \delta \\ \text{gleit}, 5 \end{array} \right. \rightarrow 9.4868 \cdot \left(\frac{N}{m \cdot kg} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta = \frac{k}{2 \cdot m_a} \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, \delta = 9.4868 \cdot s^{-1} \\ \text{auflösen}, k \\ \text{gleit}, 5 \end{array} \right. \rightarrow 9.4868 \cdot \frac{kg}{s}$$ Berechnung von k

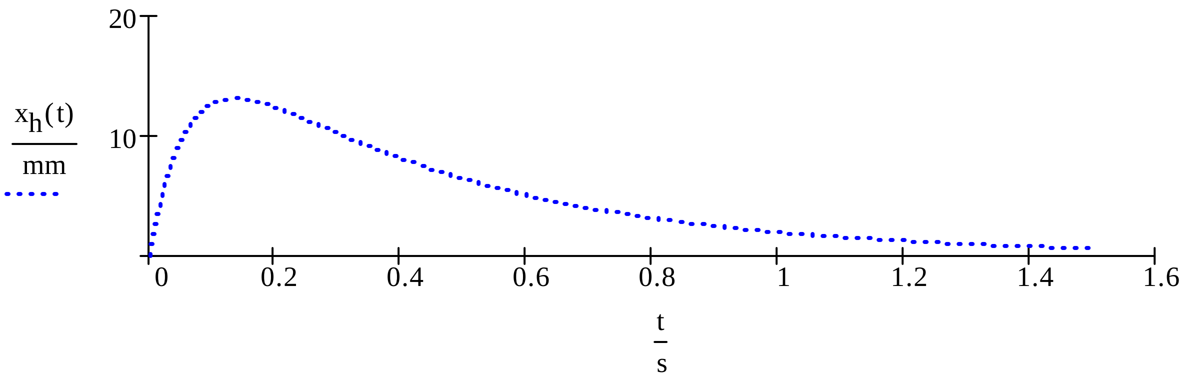
$\delta := 9.4868 \cdot s^{-1}$

$k := 9.4868 \cdot \frac{kg}{s}$

Definition von k und δ für raphische Darstellung

$$x_h(t) := .500 \cdot \frac{v_0}{\left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\;2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp\left[\left[\left[-1. \cdot \delta + \left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\;2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right] \cdot t\right] - .500 \cdot \frac{v_0}{\left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\;2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp\left[\left[-1. \cdot \delta\right.\right.$$

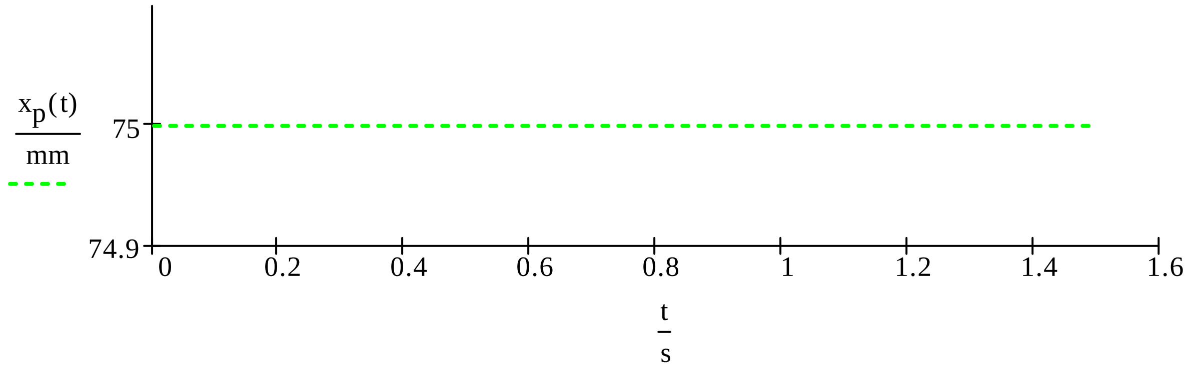
$t := 0 \cdot s, 0.0001 \cdot s .. 1.5 \cdot s$



graphische Darstellung der partikulären Lösung:

$F_0 := 1.5 \cdot N$ Angabe für F_0

$$x_p(t) := \frac{F_0}{m_a \cdot \omega_0^{\,2}}$$



Berechnung für den Zeitpunkt t_{max}, in dem die Auslenkung $x_h(t)$ den größten Wert annimmt. Dazu bildet man die erste Ableitung von $x_h(t)$ und setzt diese null

$$0 = \frac{d}{dt}\left[.500 \cdot \frac{v_0}{\left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp\left[\left[-1. \cdot \delta + \left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot t\right] - .500 \cdot \frac{v_0}{\left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp\left[\left[-1. \cdot \delta \right.\right.\right.$$

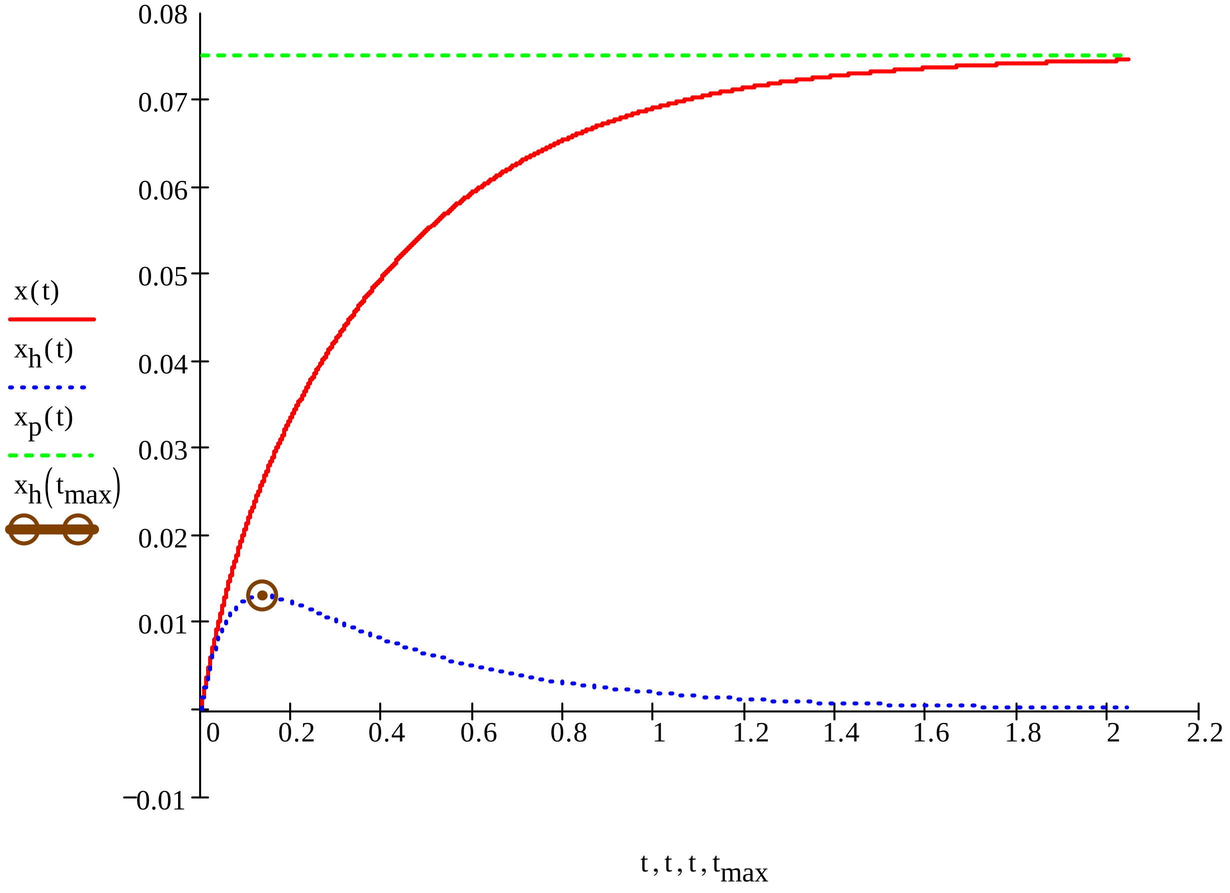
$$t_{max} := -1. \cdot \frac{\ln\left[\frac{1}{\left[2 \cdot \delta \cdot \left(\delta^2 - \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot \delta^2 - \omega_0^{\,2} \right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \omega_0 \right]}{\left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$t_{max} = 0.13611\,s$

Darstellung von x(t), x_h(t) und x_p(t) in einem Graphen für $0 \cdot s \le t \le t_{max}$

$$x(t) := \frac{F_0}{m_a \cdot \omega_0^{\,2}} + .500 \cdot \frac{-1. \cdot \left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot F_0 - 1. \cdot \delta \cdot F_0 + v_0 \cdot m_a \cdot \omega_0^{\,2}}{\left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot m_a \cdot \omega_0^{\,2}} \cdot \exp\left[\left[\left[-1. \cdot \delta + \left(\delta^2 - 1. \cdot \omega_0^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\right.\right.\right.$$

$$t := 0 \cdot s, 0.0001 \cdot s \,..\, 15 \cdot t_{max}$$



zurück zur Startdatei